数　学　Ⅲ

［Ⅰ］　次の［１］から［４］の問題について答えよ。

［１］　極限値についての次の２つの等式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{px^2+qx+r}{x^2+x-6}=4,\quad \lim_{x\to 2}\frac{px^2+qx+r}{x^2+x-6}=2$$

が両方とも成り立つような定数 p, q, r の値は

$p=\boxed{\text{ア}}$，$q=\boxed{\text{イ　ウ}}$，$r=\boxed{\text{エ　オ}}$ である。

［２］　関数 $f(x)=2\sin x\cos^3 x$ について次の問に答えよ。

（1）$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boxed{\text{カ　キ}}$ である。

（2）関数 $f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値は，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である。

［３］　楕円 C : $4x^2-8x+y^2+4y=8$ について，次の問に答えよ。

（１）　楕円 C は，楕円 $4x^2+y^2=16$ を x 軸方向に $\boxed{サ}$，y 軸方向に $\boxed{シス}$ だけ平行移動したものである。楕円 C の短軸の長さは $\boxed{セ}$ であり，長軸の長さは $\boxed{ソ}$ である。

（２）　直線 $y=2x+1$ と楕円 C との異なる２つの交点を P，Q とすると，

$$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツ}}$$ である。

［４］　次の問に答えよ。ただし，$i=\sqrt{-1}$ である。

（１）　複素数 α を $\alpha=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ とするとき，

$$\alpha^6=-\frac{\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}+\frac{\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}i$$ である。

（２）　２つの複素数 β，γ を

$\beta=\cos\frac{5}{36}\pi+i\sin\frac{5}{36}\pi$，$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{27}\pi+i\sin\frac{13}{27}\pi\right)$ とするとき，$\frac{\beta^2}{\gamma^3}=-\sqrt{\boxed{ヌ}}+\sqrt{\boxed{ネ}}\,i$ である。

［Ⅱ］　k を定数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ と $C_2 : y = k \sin x$ が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で交わるような定数 k の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < k < \boxed{\text{イ}}$ である。そのような k に対し，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲での曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とし，$0 \leqq x \leqq \alpha$ の範囲において C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_1 とする。また，$\alpha \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において曲線 C_1，C_2 および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。

$k = 1$ のとき $S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，等式 $2S_1 = S_2$ が成り立つような定数 k の値は $k = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。